

Tétel (a maradékos osztás tétele). Ha $f, g \in T[x]$, és $g \neq 0$, akkor léteznek olyan egyértelműen meghatározott $q, r \in T[x]$ polinomok, amelyekre $f = qg + r$ és $\deg r < \deg g$.

Biz. Először az egzisztenciát bizonyítjuk. Legyen $g = b_\ell x^\ell + \dots + b_1 x + b_0$, ahol $b_\ell \neq 0$ (tehát g fokszáma ℓ). Tekintsük az $M = \{f - qg \mid q \in T[x]\}$ halmazt, és legyen $r_0 = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ az M halmaz legkisebb fokszámú eleme (ahol szokás szerint $a_k \neq 0$). Célunk megmutatni, hogy

Indirekt módon bizonyítunk, azaz feltesszük, hogy Jelölje q_1 az polinomot (az ilyen polinomot, mivel csak egy tagból áll, szokás *monomnak* nevezni). Ekkor az

$$r_1 := r_0 - q_1 g = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0 - (a_k x^k + a_k b_\ell^{-1} b_{\ell-1} x^{k-1} + \dots + a_k b_\ell^{-1} b_0 x^{k-\ell})$$

polinom foka kisebb, mint

Mivel $r_0 \in M$, létezik olyan $q_0 \in T[x]$ polinom, amelyre $r_0 = \dots$. Ebből következik, hogy $r_1 = f - (\dots) \cdot g$, azaz $r_1 \in \dots$. Ez pedig ellentmond r_0 választásának, hiszen $\dots < \deg r_0$.

Az unicitás igazolásához tegyük fel, hogy $f = q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$, ahol $\deg r_1, \deg r_2 < \deg g$. Célunk megmutatni, hogy és A fokszámokra feltett egyenlőtlenségből következik, hogy $\deg(r_2 - r_1) < \dots$. Másrészt átrendezéssel kapjuk, hogy $(q_1 - q_2) \cdot g = \dots$, tehát

$$\deg(\dots) + \deg \dots = \deg(\dots).$$

Tudjuk, hogy itt a jobb oldal kisebb, mint, ezért $\deg(q_1 - q_2) < \dots$. Ez csak úgy lehet, hogy $\deg(q_1 - q_2) = \dots$, azaz, ebből pedig már rögtön következik az is, hogy, és épp ezt kellett bizonyítanunk. $\square$